Teoría de Distribuciones y Aplicaciones.
Clases de Matemáticas VII (MA3111)
Universidad Simón Bolívar

jvillamizar@usb.ve

1 de agosto de 2015

Capítulo 1

Teoría de Distribuciones

El objetivo de este curso es presentar a los estudiantes una generalización de la *transformada de Laplace* y la *transformada de Fourier* en el contexto de las *funciones generalizadas* y sus aplicaciones en la resolcución de *ecuaciones diferenciales* (entre otras).

1.1. Introducción

Hasta este momento el estudio de funciones que se ha realizado en los cursos de cálculo anteriores se ha limitado a aquellas cuyo dominio es algún subconjunto de los números reales o de los números complejos, salvo por el curso de matemáticas III en el que se dedica tiempo a otra clase de funciones, las transformaciones lineales, las cuales tienen su dominio en algún espacio vectorial V y cuya imagen está en otro espacio vectorial W. Por razones ajenas a mi voluntad sólo son considerados en ese curso espacios vectoriales de dimensión finita, pero bien podrían tener dimensión infinita. Una *función generalizada* es, a groso modo, una función cuyo dominio es una espacio vectorial de funciones (llamadas funciones de prueba), las imágenes son números complejos, y es lineal y continua. Es decir, es una transforcaión lineal (como las de mateáticas III) con V un espacio (de dimensión infinita) cuyos elementos son funciones .Es decir, una función generalizada (o distribución) es una función cuya variable es otra función, y el espacio de llegada es $W = \mathbb{C}$[1]. Tales funciones reciben el nombre de *funcionales*.

Mostremos algunos ejemplos antes de continuar:

[1]El espacio V es un espacio vectorial complejo.

Ejemplo 1.1.1.

1. $V = C_{[a,b]}$, $F : V \longrightarrow \mathbb{C}$: $F(\phi) = \int_a^b \phi(x)\, dx$.
2. $V = C(\mathbb{R})$, $\delta_c : V \longrightarrow \mathbb{C}$: $\delta(\phi) = \phi(c)$.
3. $V = C^1(\mathbb{R})$, $D : V \longrightarrow \mathbb{C}$: $D(\phi) = \phi'(0)$.

Es muy común, y además natural en algunos casos, considerar funcionales lineales en lugar de funciones para describir cantidades físicas, modelar ciertas situaciones, o trabajar con cierta clase de problemas. Por ejemplo, usemos la variable t para el tiempo y digamos que $F(t)$ es la función que para cada t nos da la fuerza (en módulo) que actúa sobre un objeto en ese preciso instante. Si embargo, es imposible hacer estas observaciones de manera instantátea. De hecho, cualquier instrumento de medición que usemos registrará el efecto de F sobre él en un intervalo de tiempo de longitud positiva. Entonces es necesario, para ser más precisos, extender la definición de función. Las funciones generalizadas proveen una mejor forma de analizar ciertos fenómenos físicos. Más aún, si una cantidad física puede ser representada de manera adecuada por una función, entonces también puede ser caracterizada por una función generalizada, sin embargo, hay situaciones que pueden ser descritas de manera precisa mediante el uso de funciones generalizadas pero no de funciones (por ejemplo, potenciales producidos por cargas concentradas en un punto), lo que representa una ventaja de esta última representación.

Otro ejemplo de funcionales lineales, con el que algunos estudiantes deben estar familiarizados, ocurre cuando especificamos una función $f(t)$ por su transformada de Fourier $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt$. La función está siendo considerada como un funcional, el espacio de las funciones de prueba consiste en todas la exponenciales $e^{-i\omega t}$. Aquí ω es un número real fijo para cada función de prueba. Gran parte de las funciones generalizadas que estudiaremos actúan, como la transformada de Fourier, a través de una integral impropia. Sin embargo, las funciones de prueba sobre las que están definidas no pueden ser en general escritas de manera explícita. Vamos a dedicar la primera sección de este capítulo al estudio de las funciones de prueba, para luego pasar al concepto preciso y manipulación de las funciones generalizadas.

Es mi intención que estos apuntes sean autocontenidos en la medida de lo posible, por lo que será añadida una sección de repaso sobre integrales impropias y ejemplos de espacios de dimensión infinita cuyos elementos son funciones. Es importante que el estudiante estudie y se familiarice con las definiciones y notación que introduciremos en esta sección antes de continuar.

1.2. Integrales Impropias. Repaso

En esta sección recordaremos algunas integrales impropias estudiadas en matemáticas II (MA-1112), estudiaremos con detalles algunos ejemplos que son de gran importancia en este curso e introduciremos la notación y los espacios vectoriales de funciones que serán usados en el estudio de las funciones generalizadas, las series de Fourier y las transformadas de Laplace y Fourier.

Observación 1.2.1. A lo largo del curso supondremos que las funciones tienen imágenes en $\mathbb{C}$.

Definición 1.2.2. Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice **continua a trozos en** $[a, b]$, si existe un número finito de puntos $\{c_i\}_{i=1}^n$, $a \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_n \leq b$ tales que f es continua en (c_i, c_{i+1}) y existen los límetes laterales $f(c^\pm) := \lim_{x \to c^\pm} f(x)$, para cada $c \in [a, b]$, salvo para $c = a$ y $c = b$, casos en los que sólo consideramos los límetes por la derecha y por la izquierda respectivamente. Una función es **continua a trozos en** $\mathbb{R}$ si es continua a trozos en cada subintervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

Del mismo modo podemos definir continuidad a trozos en intervalos de la forma $[a, +\infty)$ o $(-\infty, b]$.

Notación:

- $\mathcal{C}_p[a, b]$ denota al espacio de las funciones continuas a trozos en $[a, b]$.
- $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ o $\mathcal{C}_p$ denota al espacio de las funciones continuas a trozos en $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.3. Sea $f \in \mathcal{C}_p$. Definimos las siguientes integrales impropias

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x)\,dx &:= \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx \\ \int_{-\infty}^a f(x)\,dx &:= \lim_{S\to\infty} \int_{-S}^a f(x)\,dx \end{aligned}$$

Si el límite existe diremos que la integral respectiva converge o existe. Si no decimos que diverge o que no existe.

Ejercicio 1.2.4. Diga si las siguientes integrales convergen o divergen

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-x}\,dx$

Ejercicio 1.2.5. Sea $a > 0$. ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ la integral $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ converge?.

Ejercicio 1.2.6. Sea $z \in \mathbb{C}$. Muestre que la integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-zx}\,dx$ converge a $\frac{1}{z}$ si y sólo si $\Re(z) > 0$.

Es decir,

$$\int_0^\infty e^{-zx}\,dx = \frac{1}{z}, \qquad \text{sii} \quad \Re(z) > 0$$

Este ejemplo, y los que siguen, será usado con frecuencia cuando estudiemos la transformada de Laplace. De hecho, esta integral es la transformada de Laplace de la función de Heaviside (que será definida más adelante), por lo que recomendamos memorizar para ser usado en el futuro.

Ejercicio 1.2.7. ¿Qué se puede decir de la convergencia de la siguientes integrales? En cada caso, establezca condiciones sobre z para que la integral converja y calcúlela:

1. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-zx}\,dx$, $z \in \mathbb{C}$ fijo.

2. $\displaystyle\int_0^\infty \sin(\omega x)e^{-zx}\,dx$, $z \in \mathbb{C}$ fijo.

3. $\displaystyle\int_0^\infty \cos(\omega x)e^{-zx}\,dx$, $z \in \mathbb{C}$ fijo.

4. $\displaystyle\int_0^\infty \sinh(\omega x)e^{-zx}\,dx$, $z \in \mathbb{C}$ fijo.

5. $\displaystyle\int_0^\infty \cosh(\omega x)e^{-zx}\,dx$, $z \in \mathbb{C}$ fijo.

Definición 1.2.8. Sea $f \in \mathcal{C}_p$. Definimos la siguiente integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx := \lim_{S\to\infty} \int_{-S}^{a} f(x)\, dx + \lim_{R\to\infty} \int_{a}^{R} f(x)\, dx$$

Si ambos límites existen diremos que la integral converge o existe. Si no diremos que diverge o no existe.

Ejercicio 1.2.9. Demuestre que la definición no depende de a.

Ejercicio 1.2.10. Diga si las siguientes integrales convergen o no

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\, dx$, $a > 0$.

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\, dx$.

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx$, $a > 0$.

Ejercicio 1.2.11. Considere la función $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

a) Muestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ existe.

b) Muestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ no existe.

Definición 1.2.12. Sea $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Diremos que:

- f **es integrable sobre** (a, b) si existe $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\, dx$.
- f **es absolutamente integrable en** (a, b) si existe $\displaystyle\int_{a}^{b} |f(x)|\, dx$.

  Cuando $(a, b) = \mathbb{R}$ diremos simplemente integrable, o absolutamente integrable, según sea el caso.

- f **es localmente absolutamente integrable** si para cada intervalo cerrado y acotado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ existe $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$.

  Note que esto no necesariamente implica que f sea absolutamente integrable. Por ejemplo, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ es localmente absolutamente integrable, pero no es absolutamente integrable. En general, si $f \in \mathbb{C}_p(\mathbb{R})$, f es localmente absolutamente integrable, pero no necesariamente es absolutamente integrable.

Notación 1.2.13.

- $L(a,b)$ denota el espacio de las funciones integrables sobre (a,b).
- $L^1(a,b)$ denota el espacio de las funciones absolutamente integrables sobre (a,b).
- $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ denota el espacio de las funciones localmente absolutamente integrables, o simplemente L^1_{loc}.

Note que nos hemos referido a estos conjuntos de funciones como *espacio*, y en efecto lo son, con las operaciones de suma de funciones y producto por un escalar usuales estos conjuntos son espacios vectoriales.

Definición 1.2.14. En general, denotamos por $L^p(a,b)$ al conjunto de las funciones $f : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que existe la integral $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p\,dx$, con $0 < p < \infty$.

Tarea 1.2.15. En particular, el espacio $L^2(a,b)$ es un espacio con producto interno (repasar matemáticas III, MA-1116). En él podemos definir el siguiente producto: $< f, g > := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

(Recordar) Propiedades del producto interno (serán usadas cuando estudiemos las series de Fourier):

- sesquilineal
- definido positivo
- norma de un vector
- desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

- ángulo entre vectores
- vectores ortogonales
- teorema de pitágoras
- proyección ortogonal
- proyección ortogonal sobre un subespacios

Ejercicio 1.2.16. Muestre que $\dfrac{\sin(ax)}{x}, e^{-a|x|}, \dfrac{1}{a^2+x^2}, e^{-ax^2/2} \in L^2(\mathbb{R})$, donde $a > 0$.

Ejercicio 1.2.17. Considere el espacio $L^2(-L, L)$, y en él el conjunto $\mathcal{B} = \{\varphi_n\}_n$. En cada caso muestre que $\mathcal{B}$ es un conjunto ortogonal, calcule $\|\varphi_n\|$ para cada n.

1. $\mathcal{B} = \{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$
2. $\mathcal{B} = \{1\} \cup \{\cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$

Ejercicio 1.2.18. Considere el espacio $L^2(0, L)$, y en él el conjunto $\mathcal{B} = \{\varphi_n\}_n$. En cada caso muestre que $\mathcal{B}$ es un conjunto ortogonal, calcule $\|\varphi_n\|$ para cada n.

1. $\mathcal{B} = \{\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\mathcal{B} = \{1\} \cup \{\cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$

En lo que sigue vamos a enunciar algunas propiedades y criterios de convergencia para las integrales impropias que serán usados con frecuencia:

Proposición 1.2.19.

1. *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es par o impar, para estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ basta estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$, es decir, si f es par o impar, entonces $f \in L(\mathbb{R})$ si, y sólo si, $f \in L(0, +\infty)$.*
2. *Sea $f \in L(\mathbb{R})$. Si f es impar, entonces $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$.*

   Es importante que f sea integrable, no basta que sea impar. Por ejemplo si $f(x) = \sinh(x)$, esta función es impar y la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ni siquiera existe.

3. *Sea* $f \in L(\mathbb{R})$. *Si* f *es par, entonces* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$.

4. *Si* $f \in L(\mathbb{R})$, *entonces* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$.

   Una vez más hacemos énfasis en que la hipótesis $f \in L(\mathbb{R})$ *es importante. Por ejemplo, si* $f(x) = \sin(x)$, *la integral* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *no existe pero el ímite* $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$ *sí, de hecho es igual a cero, por lo que la identidad anterior no tiene sentido.*

5. *(Criterio de Comparación) Si* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ *y* $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *son tales que* $0 \le |f(x)| \le g(x)$, *para todo* $x \in (a,b)$, *y* $g \in L(a,b)$, *entonces* $f \in L^1(a,b)$.

6. *Si* $f \in L^1(a,b)$, *entonces* $f \in L(a,b)$.

   Es importante resaltar que el recíproco no es cierto. Ya vimos por ejemplo que $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ *es integrable pero no es absolutamente integrable.*

7. *Si* $f \in L^1(a,b)$ *y* g *es acotada sobre* (a,b), *entonces* $fg \in L^1(A)$.

   Notación 1.2.20.

   - $C_b(a,b)$ denota al espacio de las funciones acotadas sobre (a,b).

Ejercicio 1.2.21. Estudie para $\omega \in \mathbb{R}$ la convergencia de las siguientes integrales y calcúlelas:

a) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\cos(\omega x)\,dx$,

b) $\displaystyle J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-i\omega x}\,dx$,

c) $\displaystyle K = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos(\omega x)\,dx$,

Muestre que $I = J = 2K$

Ejercicio 1.2.22. Estudie para $\omega \in \mathbb{R}$ la convergencia de las siguientes integrales y calcúlelas:

a) $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} sig(x) \sin(\omega x)\, dx,$

b) $J = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} sig(x) e^{-i\omega x}\, dx,$

c) $K = \int_{0}^{\infty} e^{-x} \sin(\omega x)\, dx,$

Muestre que $I = J = 2K$

Ejercicio 1.2.23.

a) Muestre que $\int_0^{\infty} x^k e^{-x}\, dx$ converge para cada $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Calcule la integral.

b) Muestre que $\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-|x|}\, dx$ converge para cada $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Calcule la integral. Sugerencia: si $x > 0$, $x^k \leq k! 2^k e^{x/2}$.

Ejercicio 1.2.24.

a) Muestre que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx$ converge.

b) Muestre que $\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^2/2}\, dx$ converge para cada $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Sugerencia: $x^k \leq k! e^x$.

Ejercicio 1.2.25. Estudie, para $a > 0$, la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{-|x|}\, dx$

b) $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{-x}\, dx$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x^3 + a^2 x}\, dx$

Ejercicio 1.2.26. Muestre que $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}}\, dx$ converge.

Ejercicio 1.2.27. Estudie para cada $\omega \in \mathbb{R}$ la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\omega x}\, dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(\omega x)\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \sin(\omega x)\, dx$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x^2/2} \sin(\omega x)\, dx$

Ejercicio 1.2.28. ¿Qué se puede decir de la convergencia de las siguientes integrales?:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-i\omega x}\, dx$, $\omega \in \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cos(\omega x)\, dx$, $\omega \in \mathbb{R}$

Un teorema que será utilizado con frecuencia en algunas demostraciones es el siguiente (ya estudiado en matemáticas V (MA-2112))

Teorema 1.2.29 (Fubini)**.** *Sea* $f : (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|\, dy \right) dx$ *existe. Entonces las siguientes integrales existen y son iguales*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy$$

Ejercicio 1.2.30. Calcule $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx$.

Ejercicio 1.2.31. Calcule $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^2/2}\, dx$ para cada $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

1.3. Espacios de Funciones de Prueba

Antes de poder estudiar las funciones generalizadas es preciso describir el espacio de funciones de prueba sobre el que estarán actuando. Aunque son varias los espacios de prueba que pueden ser estudiados, en este curso consideraremos sólo dos: el espacio de las *funciones suaves con soporte compacto*, y el espacio de las *funciones suaves y de rápido decrecimiento*, siendo el primero el que usaremos con más frecuencia y el más importante para las dos primeras partes del curso. El segundo, el cual contiene al primero, será usado al final del curso cuando estudiemos una generalización de la transformada de Fourier a funciones generalizadas.

Notación 1.3.1. $C^\infty(\mathbb{R})$ o C^∞ denota al espacio de las funciones infinitamente diferenciables (o suaves) definidas sobre todo $\mathbb{R}$. Ejemplos de funciones suaves son: polinomios, exponenciales, y sus combinaciones vía operaciones aritméticas (suma y producto) y composición.

Los espacios que definiremos son subespacios de C^∞, es decir, las funciones de prueba serán funciones suaves que satisfacen alguna otra condición. Antes es necesario estudiar las siguientes definiciones

Definición 1.3.2 (Soporte de una Función)**.** El soporte de f, $Sop(f)$, se define como la clausura del conjunto de puntos donde f no se anula

$$Sop(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \neq 0\}}$$

Dicho en otras palabras, es el menor conjunto cerrado (según la relación de inclusión) fuera del cual f es identicamente cero.

Si la definición parece confusa, piense que es el conjunto donde f tiene información, entendiendo por esto que en aquellos intervalos abiertos donde f es idénticamente cero f no contienen inforación. Esta manera intuitiva de pensar puede ser útil para calcular el soporte de funciones conocidas. Veamos algunos ejemplos.

Ejercicio 1.3.3. Diga cuál es el soporte de las siguientes funciones:

- $f(x) = e^x$
- $f(x) = \sin(x)$
- $f(x) = 0$

- La función de Heaviside: $H(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
- El pulso rectangular: $1_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } a < x < b; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
- $\sin(x)H(x)$
- $1_{[a,b]}(x)$
- $\sin(x)1_{[-\pi,\pi]}(x)$
- $e^{-x^2/2}$

Observación 1.3.4. Note que por definición $Sop(f)$ es un conjunto cerrado. Un subconjunto de $\mathbb{R}$ se dice compacto sii es cerrado y acotado. Así

Definición 1.3.5 (Soporte compacto)**.** Si $Sop(f)$ es acotado, es decir, existe un intervalo finito $[a,b]$ tal que $Sop(f) \subset [a,b]$, diremos que f es de soporte compacto.

Ejercicio 1.3.6. En los ejemplos anteriores diga cuál función tiene soporte compacto

1.3.1. Funciones suaves con soporte compacto

Definición 1.3.7 (Espacio de las Funciones de Prueba)**.** Denotamos por $\mathcal{D}$ o $C_0^\infty(\mathbb{R})$ al espacio de las funciones infinitamente diferenciables cuyo soporte es compacto, y lo llamaremos *espacio de las funciones de prueba* (o *espacio de prueba*).

Entonces una función de prueba $\phi \in \mathcal{D}$ es una función suave que es idénticamente igual a cero fuera de algún intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, y por tanto $\lim_{x \to \pm\infty} \phi(x) = 0$.

Ejercicio 1.3.8. En este ejercicio construiremos explícitamente un ejemplo de una función suave con soporte compacto en términos de funciones elementales: Sea

$$\xi(x) = \begin{cases} e^{-1/(\alpha-x)(x-\beta)} & \text{, si } \alpha < x < \beta; \\ 0 & \text{, si no.} \end{cases}$$

Entonces $\xi \in \mathcal{D}$.

El siguiente ejercicio es de suma importancia pues ayuda a construir funciones de prueba con valores prescritos en algún intervalo dado. Por ejemplo, deseamos construir una función de prueba que en el intervalo $[-\pi,\pi]$ idénticamente igual a $f(x)=\sin(x)$, o $f(x)=e^x$, o la función que queramos en el intervalo acotado que queramos.

Ejercicio 1.3.9. Consideremos el intervalo acotado $[a,b]$ y una función suave $f\in C^\infty$. Deseamos construir $\varphi\in\mathcal{D}$ tal que $\varphi(x)\equiv f(x)$ en $[a,b]$. Sea ξ es la función de prueba del ejemplo anterior con $\alpha=0$ y $\beta=\epsilon>0$, e $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x)\,dx$:

a) Haga un bosquejo de la gráfica de

   a) $\psi_1(x)=\dfrac{1}{I}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\xi(t)\,dt$,

   b) $\psi_2(x)=\psi_1(-x)$

   c) $\psi_1(x-b)$

   d) $\psi_2(x-a)$

   e) $\psi_1(x-b)+\psi_2(x-a)$

   f) $\chi_{[a,b]}(x)=1-(\psi_1(x-b)+\psi_2(x-a))$.

b) Considere $\varphi(x)=\chi_{[a,b]}(x)f(x)$ (haga un bosquejo de la gráfica).

Definición 1.3.10. (Indicatriz) A la funciíon de prueba $\chi_[a,b]$ del ejemplo anterior la llamaremos *función indicatriz del intervalo* $[a,b]$.

Este ejemplo muestra que las funciones de prueba en $\mathcal{D}$ pueden tener una gran variedad de formas. De hecho, cualquier función continua $f(x)$ que se anula fuera de un intervalo acotado puede ser aproximada uniformemente por funciones de prueba, es decir, dado $\epsilon>0$, existe una $\phi\in\mathcal{D}$ tal que $|f(x)-\phi(x)|<\epsilon$ para toda $x\in\mathbb{R}$. Para demostrar esto considere nuevamente la función de prueba ξ del ejemplo anterior con $\alpha=-1$ y $\beta=1$. Entonces sea la función

$$\phi_\epsilon(x)=\frac{\xi(x/\epsilon)}{\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x/\epsilon)\,dx},\qquad \epsilon>0$$

Ejercicio 1.3.11.

a) Muestre que $\phi_\epsilon(x)$ es una función de prueba que es cero para $|x| \geq \epsilon$, es positiva en todas partes, y satisface la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\epsilon(x)\, dx = 1$$

(INSERTAR GÁFICA)

b) Muestre que las funciones $\varphi_\epsilon(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\phi_\epsilon(x-y)\, dy$ son funciones de prueba.

Estas funciones así definidas son el producto de *convolución* de la función f con las funciones $\varphi_\epsilon(x)$, el cual juega un papel importante en la resolución de ecuaciones diferenciales, y será estudiado con más detalle en los siguientes capítulos.

c) Muestre que las funciones $\varphi_\epsilon(x)$ convergen uniformemente a f cuando $\epsilon \to 0$.

Otro concepto importante que es necesario conocer para definir a las funciones generalizadas es el de convergencia en $\mathcal{D}$. Las funciones generalizadas son funcionales lineales continuos que actúan sobre un espacio de funciones de prueba. La linealidad es un concepto familiar pues ya hemos lidiado con operaciones lineales en los cursos anteriores (por ejemplo la derivación y la integración son operaciones lineales). Sin embargo la continuidad es un aspecto más delicado de tratar. Recordemos que, a groso modo, una función f es continua en un punto x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. En esta definición x_0 es un punto interior del dominio de f. De manera equivalente podemos escribir que si $x_n \longrightarrow x_0$ cuando $n \to \infty$, entonces $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ cuando $n \to \infty$.En $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ es claro lo que significa $x_n \longrightarrow x_0$ y $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ cuando $n \to \infty$, pero si el dominio de la función en cuestión es un espacio de funciones, como $\mathcal{D}$, entonces no es claro el significado de “$\phi_n \longrightarrow \phi$ cuando $n \to \infty$ ”, $\phi_n, \phi \in \mathcal{D}$. De hecho se puede definir de varias maneras diferentes esta nueva noción de límite, o convergencia en $\mathcal{D}$. En nuestro contexto la definición es como sigue:

Definición 1.3.12 (Convergencia en $\mathcal{D}$)**.** Diremos que una sucesión de funciones $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}$ converge a ϕ en $\mathcal{D}$ sii

1. Existe un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ tal que $Sop(\phi_n) \subset [a,b]$ para todo n.
2. para todo $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\max_{[a,b]} \left|\phi_n^{(k)}(x) - \phi^{(k)}(x)\right| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.
   Es decir, $\{\phi_n\}_n$ converge uniformemente a ϕ, y para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo, la sucesión $\{\phi_n^{(k)}\}_n$ también convergen uniformemente a $\phi^{(k)}$.

Ejercicio 1.3.13. Consideremos otra vez la función $\xi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & \text{, si } -1 < x < 1; \\ 0 & \text{, si no.} \end{cases}$. Entonces $\phi_n(x) = \xi(x/n)/n$ converge uniformemente a cero, y la sucesión de derivadas $\phi_n^{(k)}$ también converge uniformemente a 0 (demuestre esta afirmación). Sin embargo ϕ_n no converge a cero en $\mathcal{D}$. ¿Por qué?

Podemos decir que una sucesión de funciones de prueba $\{\phi_n(x)\}_n$ es convergente en $\mathcal{D}$ si todas las funciones $\phi_n(x)$ están en $\mathcal{D}$, se anulan fuera de algún intervalo fijo acotado, y para cada $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ fijo, la sucesión $\{\phi_n^{(k)}(x)\}_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$. La convergencia uniforme asegura que la función límite de $\{\phi_n^{(k)}\}$, para cada k, debe ser continua, y por tanto es una función en $\mathcal{D}$. Es común referirse a esta propiedad como: *$\mathcal{D}$ es cerrado bajo convergencia* o *completo*.

En la definición anterior podemos considerar como subíndice de las sucesiones en lugar de $n \in \mathbb{N}$ algún ν que converja continuamente a infinito o a algún límite finito. Es estos casos ya no hablamos de sucesiones convergentes en $\mathcal{D}$ sino más bien de conjuntos dirigidos convergentes en $\mathcal{D}$. En este curso estaremos considerando en la mayoría de los casos sucesiones convergentes, sin embargo en algunos ejemplos muy particulares podríamos considerar conjuntos dirigidos convergentes. Por ejemplo:

Ejercicio 1.3.14. Sea $\phi \in \mathcal{D}$. Muestre que $\phi_\epsilon(x) = \frac{\phi(x+\epsilon)-\phi(x-\epsilon)}{2\epsilon}$ converge a $-\phi'(0)$, cuando $\epsilon \longrightarrow 0$.

Ejercicio 1.3.15. Muestre que el espacio $\mathcal{D}$ es cerrado bajo las siguientes operaciones

1. traslaciones,
2. reescalamientos (producto de la variable independiente por un número distinto de cero),
3. derivación,

4. producto por funciones suaves.

1.3.2. Funciones suaves y de rápido decrecimiento

Otro espacio de prueba que estaremos considerando es el de las funciones suaves y de rápido decrecimiento. Este espacio juega un papel importante en la definición de la transformada de Fourier de una distribución. Ejemplos de estas funcionas ya hemos visto en la parte anterior pues las funciones suaves con soporte compacto son casos particulares de esta nueva clase de funciones.

Definición 1.3.16 (Función suave de rápido decrecimiento)**.** Una función $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice *suave y de rápido decrecimiento* sii

1. $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$
2. Para todo $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se cumple $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |x^k \phi^{(n)}(x)| = 0$

Observación 1.3.17. La segunda condición en esta definición puede establecerse de manera equivalente de la siguiente manera: Para cada $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe una constante $C > 0$ tal que $|x^k \phi^{(n)}(x)| \leq C$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir, $|x^k \phi^{(n)}(x)|$ es acotada en todo $\mathbb{R}$. La constante C puede depender de k y n.

Notación 1.3.18. Al espacio de las funciones suaves y de rápido decrecimiento lo denotaremos por $\mathcal{S}$, y también se conoce como la *clase de Schwarz*.

Ejercicio 1.3.19. Las funciones de $\mathcal{D}$ son funciones de $\mathcal{S}$. Es decir, $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

Ejercicio 1.3.20. Si $a > 0$, $e^{-ax^2} \in \mathcal{S}$

Ejercicio 1.3.21. Las exponenciales e^x, e^{-x}, y $e^{-|x|}$ no pertenecen a $\mathcal{S}$.

Ejercicio 1.3.22. Las funciones $e^x \chi_{(-\infty,0]}$, $e^{-x}\chi_{[0,\infty)}$, y $e^{-|x|}(1 - \chi_{[-\epsilon,\epsilon]})$ pertenecen a $\mathcal{S}$. (Hacer un bosquejo de la gráfica de cada una de ellas).

Definición 1.3.23 (Convergencia en $\mathcal{S}$)**.** Decimos que una sucesión $\{\phi_n\} \subset \mathcal{S}$ converge a ϕ en $\mathcal{S}$ sii para cada $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la sucesión $\{x^m \phi_n^{(k)}(x)\}$ converge uniformemente a $x^m \phi^{(k)}(x)$ en $\mathbb{R}$. Es decir, para cada m y k, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left| x^m (\phi_n^{(k)}(x) - \phi^{(k)}(x)) \right| \right) = 0$.

Hay una forma equivalente de definir la convergencia en $\mathcal{S}$ como sigue: Una sucesión $\{\phi_n\} \subset \mathcal{S}$ es convergente en $\mathcal{S}$ si satisface

- para cada $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe una constante C tal que $\left|x^m \phi_n^{(k)}(x)\right| \leq C$ para todo x y para todo n.
- para cada k, la sucesión $\{\phi_n^{(k)}\}$ converge uniformemente sobre cada intervalo acotado en $\mathbb{R}$.

Al igual que $\mathcal{D}$, el espacio $\mathcal{S}$ es cerrado bajo convergencia, es decir, la función límite también pertenece a $\mathcal{S}$.

Ejercicio 1.3.24. Demuestre que si una sucesión $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}$ converge a ϕ en $\mathcal{D}$, entonces $\{\phi_n\}$ converge a ϕ en $\mathcal{S}$.

Ejercicio 1.3.25. Demuestre que el espacio $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{S}$. Es decir, para cada $\phi \in \mathcal{S}$, hay una sucesión $\{\phi_n\}$ en $\mathcal{D}$ que converge a ϕ en $\mathcal{S}$.

Ejercicio 1.3.26. Muestre que el espacio $\mathcal{S}$ es cerrado bajo las siguientes operaciones

1. traslaciones,
2. reescalamientos (producto de la variable independiente por un número distinto de cero),
3. derivación,
4. producto por polinomios

Ejercicio 1.3.27. Muestre con un ejemplo que $\mathcal{S}$ no es cerrado bajo la operación: producto por una función suave.

1.3.3. Funciones suaves

Los dos ejemplos anteriores de espacios de prueba son subespacios de $C^\infty(\mathbb{R})$, es decir, el espacio de las funciones suaves. Tenemos así las siguientes contenciones: $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset C^\infty$. No es difícil ver que las contenciones son propias, por ejemplo e^{-x^2} está en $\mathcal{S}$ pero no en $\mathcal{D}$, y e^{-x} está en C^∞ pero no en $\mathcal{S}$. En algunos casos es posible extender el dominio de las funciones generalizadas de un espacio de prueba a otro más amplio. Por ejemplo de $\mathcal{D}$ a $\mathcal{S}$, o a todo $\mathbb{C}^\infty$ y el funcional lineal en cuestión sigue siendo continuo en el nuevo espacio, es decir, con la definición de convergencia dada de cada espacio. Vamos a finalizar esta sección explicando brevemente cómo es la convergencia en C^∞ para pasar a definir nuestro objeto de interés, esto es, la distribución.

Definición 1.3.28. Una sucesión de funciones $\{\phi_n\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ se dice que converge a ϕ en $C^\infty(\mathbb{R})$ sii para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ y cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la sucesiíon $\{\phi_n^{(m)}\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ converge uniformemente sobre K a $\phi^{(m)}$.

Con esta definición de convergencia, el espacio $C^\infty(\mathbb{R})$ es *cerrado bajo convergencia*.

Ejercicio 1.3.29. Muestre que C^∞ es cerrado bajo las siguientes operaciones

1. traslación,
2. reescalamiento,
3. derivación,
4. producto por una función suave.

1.4. Distribuciones (Funciones Generalizadas)

Definición 1.4.1 (Distribución o Función Generalizada)**.** Una **distribución** o **función generalizada** F es un funcional lineal y continua que asigna a cada función de prueba $\phi \in \mathcal{D}$ un número complejo $F[\phi]$. Es decir, $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ y satisface

Linealidad

- $F[\phi + \psi] = F[\phi] + F[\psi]$, para todo $\phi, \psi \in \mathcal{D}$
- $F[\alpha\phi] = \alpha F[\phi]$, para todo $\phi \in \mathcal{D}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

Continuidad

Dada $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}$ tal que $\phi_n \longrightarrow \phi$ en $\mathcal{D}$, cuando $n \to \infty$, entonces $F[\phi_n] \longrightarrow F[\phi]$, cuando $n \to \infty$.

Notación 1.4.2. En lugar de escribir $F[\phi]$ escribiremos $\langle F|\phi\rangle$, y se leerá F actuando sobre ϕ o F aplicada a ϕ. Denotamos por $\mathcal{D}'$ al espacio de las funciones generalizadas (o distribuciones) definidas sobre $\mathcal{D}$ y se llama *espacio dual de $\mathcal{D}$*.

Algunos ejemplos importantes de distribuciones son los siguientes:

Ejercicio 1.4.3. La delta de Dirac

Ejercicio 1.4.4. Sea $f \in L^1_{loc}$. Definimos la distribución $F_f \in \mathcal{D}'$ por

$$\langle F_f|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

Es importante decir que el símbolo de integral ya no se entiende en el sentido estudiado en el curso de matemáticas II (MA-1112), es decir, ésta integral ya no es definida en términos de sumas de Riemann. La nueva definición (conocida como integral de Lebesgue) qudará en una parte del programa al que llamaremos *el lado oscuro del curso*, y sobre el que haremos mención de vez en cuando pero sin llegar a formar parte de él. Los tentados a explorar ese lado fascinante siempre serán bienvenidos en las asignaturas de la licenciatura en matemáticas dedicadas a tales objetos.

Definición 1.4.5 (Distribuciones regulares y singulares)**.** Si $F \in \mathcal{D}$ es tal que existe existe una función f tal que

$$\langle F|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx,\ \forall\phi \in \mathcal{D} \tag{1.1}$$

entonces se dice que F **es regular**. Si no existe tal f entonces decimos que F **es singular**.

Es decir, una distribución es regular si la acción de ella sobre cualquier función de prueba viene dada por la integral impropia 1.1.

Notación 1.4.6. Si F_f es regular escribiremos simplemente f en lugar de F_f, es decir,

$$\langle f|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

Note que en el lado derecho de esta igualdad $f(x)$ está siendo interpretada como una función, pero en el lado izquierdo como una distribución.

Notación 1.4.7. Incluso si $F \in \mathcal{D}$ no es regular escribiremos en ocasiones $F(x)$ en lugar de F.

Esta notación puede ser confusa pero resulta cómoda para definir ciertas operaciones con distribuciones y a interpretar la acción de una distribución sobre una función de prueba cuando esta última depende de algún parámetro. Así por ejemplo:

Ejercicio 1.4.8. $\langle \delta(x) | \phi(x,y) \rangle = \phi(0,y)$, para toda $\phi(\cdot, y) \in \mathcal{D}$. En este ejemplo y es un parámetro.

Ejercicio 1.4.9. Distribución regular (Heaviside)

Ejercicio 1.4.10. Distribución regular (pulso rectangular)

Ejercicio 1.4.11. La función $f(x) = \ln|x|$, $x \neq 0$, pertenece a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Y por tanto define una distribución regular en $\mathcal{D}'$

Ejercicio 1.4.12. Distribución singular (delta)

Es muy común referirse a la distribución δ como la función δ de Dirac, lo que es un error. Para evitar esto nos referiremos a ella como *la distribución δ de Dirac*, o como *el funcional δ de Dirac*, pero jamás como función. Si bien estamos usando la notación $F(x)$ para las distribuciones, en ningún momento pretenderemos considerar el valor de una distribución en algún punto específico $x \in \mathbb{R}$. De manera que escribir expresiones como $\delta(2)$, por ejemplo, es un error que será considerado grave.

Definimos de manera natural

Definición 1.4.13 (Igualdad)**.** Dadas $F, G \in \mathcal{D}$, decimos que F y G son iguales en el sentido distribucional o generalizado si

$$\langle F | \phi \rangle = \langle G | \phi \rangle, \ \forall \phi \in \mathcal{D}$$

Ejercicio 1.4.14. Demuestre que $2\delta(x) \neq \delta(x)$

Es un hecho que si dos funciones continuas f y g generan la misma distribución regular, es decir, $\langle f|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x)\ dx = \langle g|\phi\rangle$, entonces $f(x) = g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.4.15. Demuestre la afirmación anterior.

Entonces es inmediato que cada función de prueba en $\mathcal{D}$ produce de manera única una distribución regular en $\mathcal{D}'$, y a su vez esta función de prueba está únicamente determinada por esa distribución regular.

Sin embargo, si solamente tenemos una función $f \in {}^1_{loc}$, la distribución regular que ésta produce ciertamente determina a la función f de manera única en aquellos intervalos donde f es continua (los argumentos para asegurar esto son como los anteriores), pero la distribución regular no puede determinar de manera única a la función f en aquellos puntos donde es discontinua. De hecho, podríamos alterar el valor de f en algún *número finito o numerable* de puntos donde f es discontinua y no cambiar la distribución regular. Por ejemplo:

Ejercicio 1.4.16. (dar varios ejemplos de funciones iguales casi siempre)

Ejercicio 1.4.17. Calcular $f'(x)$, donde exista, y exhiba una función que sea igual a $f'(x)$ casi siempre:

a) $H(x)$

b) $\lfloor x \rfloor$ (parte entera)

c) $(\pi - |x|)1_{[-\pi,\pi]})(x)$

d) $(1 - x^2)1_{[-1,1]})(x)$

Diremos que f y g son dos funciones iguales casi siempre (c.s) si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ salvo por un número finito o numerable de puntos. Entonces, en general tenemos el siguiente teorema

Teorema 1.4.18. *Sean f y g son dos funciones de L^1_{loc}. Entonces $f(x) = g(x)$ c.s. si y sólo si $\langle f|\phi\rangle = \langle g|\phi\rangle$ para toda $\phi \in \mathcal{D}$.*

Vamos a exhibir un par de ejemplos más de distribuciones singulares que serán usadas en algunos ejercicios en los siguientes capítulos:

Ejercicio 1.4.19. La distribucińn *Valor Principal de* $\frac{1}{x}$ la denotamos por $vp(\frac{1}{x}) \in \mathcal{D}'$ y es definida por

$$\langle vp(\frac{1}{x})|\phi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x}\,dx\right)$$

Ejercicio 1.4.20. La distribución *Parte Finita de Hadamard*

1.5. Soporte de una Distribución

Si bien la definición de igualdad que hemos dado para las distribuciones es bastante natural, este concepto se puede refinar al establecer la igualdad de dos distribuciones en algún subconjunto abierto de $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Si estuviéramos hablando de funciones, f y g son iguales sobre Ω si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \Omega$, pero, como ya hemos dicho, las distribuciones no tienen valores sobre puntos de la recta dados (como las funciones). Sin embargo, las distribuciones sí poseen un comportamiento específico sobre tales comjuntos Ω. Incluso, dos distribuciones distintas podrían tener el mismo comportamiento sobre Ω. Específicamente:

Definición 1.5.1 (Igualdad de Distribuciones Sobre Conjuntos Abiertos)**.** Dos distribuciones $F, G \in \mathcal{D}$ son iguales sobre un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ sii

$$\langle F|\phi\rangle = \langle G|\phi\rangle,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}$ tal que $Sop(\phi) \subset \Omega$.

Con esta definición podemos decir que dos distribuciones son iguales, o tienen el mismo comportamiento, sobre una vecindad de un punto específico $x_0 \in \mathbb{R}$ (es decir, sobre un conjunto abierto que contiene a x_0) aun cuando no tenga sentido especificar sus "valores" en ese punto.

Ejercicio 1.5.2. Muestre que la distribución $\delta(x)$ es igual a cero (la distribución nula) sobre $(-\infty, 0)$ y sobre $(0, \infty)$.

Ejercicio 1.5.3. Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}$ no contiene el origen, entonces $F + \delta = F$ sobre Ω.

Esta definición puede conducirnos a un contexto en el que las distribuciones no están definidas sobre todo $\mathbb{R}$ sino en algún subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ (lo que quedará en el lado oscuro del curso), y a la definición del soporte de una distribución (la cual será usada cuando estudiemos el producto de convolución de funciones generalizadas):

Definición 1.5.4 (Soporte De Una Distribución)**.** Definimos el soporte de una distribución $F \in \mathcal{D}'$ como el menor subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ fuera del cual F es igual a la distribución nula, y lo denotaremos, como antes, por $Sop(F)$.

Es decir, $Sop(F)$ es el conjunto cerrado más pequeño tal que $\langle F|\phi\rangle = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}$ tal que $Sop(\phi) \subset \mathbb{R}\backslash Sop(F)$. Todo punto que pertenezca al soporte de una distribución se dice que es un *punto esencial* de la distribución, y si un conjunto K contiene al soporte de una distribución, entonces diremos que la distribución está concentrada en K. Así por ejemplo:

Ejercicio 1.5.5. Muestre que $Sop(\delta(x)) = \{0\}$.

De hecho, es posible demostrar que si una distribución tiene soporte igual a un punto, entonces es alguna combinación de δ's y derivadas de δ (en un sentido que especificaremos más adelante) concentradas en ese punto.

Ejercicio 1.5.6. Dada una distribución regular generada por la función $f \in C(\mathbb{R})$, muestre que el soporte de la distribución coincide con el soporte de f.

Si bien hay casos donde f no es continua y el resultado anterior sigue siendo cierto, la hipótesis de la continuidad es importante. Por ejemplo

Ejercicio 1.5.7. Sea $f(x) = 0$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 1$. Entonces $Sop(f)\{0\}$, pero en el sentido distribucional $Sop(f) = \emptyset$.

Ejercicio 1.5.8. Calcule en el sentido distribucional $Sop(H)$, y $Sop(1_{[a,b]})$.

1.6. Operaciones Sobre Las Distribuciones

En $\mathcal{D}'$ tenemos representaciones de funciones de L^1_{loc} (las distribuciones regulares), pero también hay otro tipo de distribuciones, las singulares. Hay operaciones, como la suma, la derivación, integración, límite, traslación, y el reescalamiento, definidas originalmente para funciones, que pueden ser extendidas a las distribuciones, aún si no son regulares. Sin embargo, hay operaciones que no podrán ser extendidas en general a este nuevo contexto, como el producto y la composoción de funciones, lo que constituye una pequeña desventaja de esta teoría. En esta sección definiremos algunas de estas operaciones.

Definición 1.6.1 (Suma). Definimos la suma de dos distribuciones $F, G \in \mathcal{D}'$ por otra distribución $F + G \in \mathcal{D}'$ que actúa como sigue:

$$\langle F + G|\phi\rangle := \langle F|\phi\rangle + \langle G|\phi\rangle,\ \forall\phi \in \mathcal{D}$$

Definición 1.6.2 (Producto por un escalar). Definimos el producto de una distribuciones $F \in \mathcal{D}'$ por un escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ como otra distribución $\alpha F \in \mathcal{D}'$ que actúa como sigue:

$$\langle \alpha F|\phi\rangle := \alpha\langle F|\phi\rangle,\ \forall\phi \in \mathcal{D}$$

Definición 1.6.3 (Traslación). Dada $F(x) \in \mathcal{D}'$ y $a \in \mathbb{R}$, definimos la traslación de F por $F(x - a) \in \mathcal{D}'$, y la acción

$$\langle F(x - a)|\phi(x)\rangle := \langle F(x)|\phi(x + a)\rangle,\ forall\phi \in \mathcal{D}$$

Ejercicio 1.6.4.

$$\langle \delta(x - a)|\phi(x)\rangle = \phi(a)$$

Definición 1.6.5 (Reflexión)**.** Dada $F(x) \in \mathcal{D}'$ definimos la reflexión de F por $F(-x) \in \mathcal{D}'$ y la acción

$$\langle F(-x)|\phi(x)\rangle := \langle F(x)|\phi(-x)\rangle,\ forall \phi \in \mathcal{D}$$

Ejercicio 1.6.6.

$$\langle \delta(-x)|\phi(x)\rangle = \langle \delta(x)|\phi(-x)\rangle = \phi(0) = \langle \delta(x)|\phi(x)\rangle$$

Así, $\delta(x) = \delta(-x)$

Definición 1.6.7 (Distribución par e impar)**.** Una distribución $F(x) \in \mathcal{D}'$ se dice par si $F(-x) = F(x)$, o impar si $F(-x) = -F(x)$

Ejercicio 1.6.8. La distribución delta de Dirac es una distribución par.

Definición 1.6.9 (Reescalamiento)**.** Dada $F(x) \in \mathcal{D}'$, y $a \in \mathbb{R}$ distinto de cero, definimos el reescalamiento de F por $F(ax) \in \mathcal{D}'$, y la acción

$$\langle F(ax)|\phi(x)\rangle := \langle F(x)|\frac{1}{|a|}\phi(\frac{x}{a})\rangle,\ forall \phi \in \mathcal{D}$$

Ejercicio 1.6.10. Calcular en el sentido de las distribuciones

a) $\delta(2-x)$,

b) $\delta(2x+1)$

c) $\delta(2-3x)$

En general no está definido el producto de dos distribuciones, pero sí podemos definir el siguiente producto:

Definición 1.6.11 (Producto por una función suave)**.** Definimos el producto de un distribución $F \in \mathcal{D}'$ por una función suave $g \in \mathcal{C}^\infty$ como $gF \in \mathcal{D}'$, y la acción

$$\langle g(x)F(x)|\phi(x)\rangle = \langle F(x)|g(x)\phi(x)\rangle,\ \forall \phi \in \mathcal{D}$$

Observación 1.6.12. No te que si $\phi \in \mathcal{D}$ y $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces el producto $g\phi$ es de nuevo una función suave y con soporte compacto, es decir, está en $\mathcal{D}$. Esta operación no tiene sentido si el espacio de funciones de prueba es el de las funciones *suaves y de rápido decrecimiento*, pues si bien $g\phi$ es una función suave, ésta no necesariamente es de rápido decrecimiento. Por ejemplo, $\phi(x) = e^{-x^2}$ es suave y de rápido decrecimiento, $g(x) = e^{x^2}$ es suave, y $g(x)\phi(x) = 1$ es suave pero no es de rápido decrecimiento.

Ejercicio 1.6.13. Demuestre que $g(x)\delta(x-c) = g(c)\delta(x-c)$.

Ejercicio 1.6.14. Calcule $g(x-a)\delta(x-a)$.

1.7. Cálculo Distribucional. Derivada generalizada

(AGREGAR MOTIVACIÓN DE LA DEFINICIÓN)

Definición 1.7.1 (Derivada distribucional o generalizada)**.** Dada $F \in \mathcal{D}'$ definimos la derivada de F (en el sentido distribucional o generalizado) por F', y

$$\langle F'(x)|\phi(x)\rangle = -\langle F(x)|\phi'(x)\rangle,\ \forall\phi \in \mathcal{D}$$

Ejercicio 1.7.2. Demuestre que dado $F \in \mathcal{D}'$, entonces $F' \in \mathcal{D}'$. Es decir, $\mathcal{D}'$ es cerrado bajo derivación.

s En general, puesto que $F' \in \mathcal{D}$, podemos calcular entonces derivadas de orden superior de manera recursiva. Así, obtenemos en general:

$$\langle F^{(n)}(x)|\phi(x)\rangle = (-1)^{(n)}\langle F(x)|\phi^{(n)}(x)\rangle,\ \forall\phi \in \mathcal{D}$$

Ejercicio 1.7.3. Delta: $\langle\delta'(x-a)|\phi(x)\rangle = -\phi'(a)$.

Ejercicio 1.7.4. Delta: $\langle(\delta(x-a))'|\phi(x)\rangle = -\phi'(a)$. Es decir, $\delta'(x-a) = (\delta(x-a))'$.

La última identidad obtenida en el ejercicio anterior es en realidad una propiedad general, como se muestra en el siguiente ejercicio:

Ejercicio 1.7.5. Demuestre que $(F(x-a))' = F'(x-a)$.

Ejercicio 1.7.6. Demuestre que la derivada generalizada es lineal.

Ejercicio 1.7.7. Calcule $\delta'(3-2x)$, $(\delta(3-2x))'$, y $(\delta'(3x+3))'$

Ejercicio 1.7.8. Demuestre que $(\delta(ax+b))' = a\delta'(ax+b)$, donde $a \neq 0$.

Notación 1.7.9. Si f es una función en L^1_{loc}, entonces produce una distribución regular $f \in \mathcal{D}'$. Denotaremos la derivada distribucional o generalizada de f por f'_{gen}, y la derivada en sentido cásico de f por f'_{cl} (donde exista).

Ejercicio 1.7.10. Heaviside (calcular la derivada clásica y la derivada generalizada).

Ejercicio 1.7.11. Pulso rectangular (calcular la derivada clásica y la derivada generalizada).

Ejercicio 1.7.12. Funciones escalonadas (calcular la derivada clásica y la derivada generalizada).

Ejercicio 1.7.13 (REVISAR). Demuestre las siguientes identidades distribucionales

a) $g(x)\delta(x-c) = g(c)\delta(x-c)$

b) $g(x)\delta'(x-c) = g(c)\delta'(x-c) - g'(c)\delta(x-c)$

c) $g(x)\delta''(x-c) = g(c)\delta''(x-c) - 2g'(c)\delta'(x-c) + g''(c)\delta(x-c)$

d) $(x-c)\delta'(x-c) = -\delta(x-c)$

e) $x\delta^{(k)}(x) = -k\delta^{(k-1)}(x)$, para $k \in \mathbb{N}$.

f) $x^2\delta''(x) = 2\delta(x)$

g) $(e^{cx}-1)\delta''(x) = c^2\delta(x) - 2c\delta'(x)$

h) $x(\delta(x)+\delta'(x))'' + (x+3)(\delta(x)+\delta'(x))' + \delta(x) + \delta'(x) = 0$

Ejercicio 1.7.14. Hallar las constantes a, b y c tales que $(g(x)\delta'(x-a))' = a\delta(x-a) + b\delta'(x-a) + c\delta''(x-a)$

Ejercicio 1.7.15 (Regla de Leibniz o regla del producto). Demuestre que

$$(gF)'_{gen} = g'_{cl}F + gF'_{gen}$$

Ejercicio 1.7.16. Calcular en le sentido generalizado la primera y segunda derivada de F:

a) $F(x) = \cos(x)H(x)$

b) $F(x) = \sinh(x)H(x)$

c) $F(x) = e^{\lambda x}H(x)$

Ejercicio 1.7.17. Sea $f(x) = (a\cos(x) + b\sin(x))H(x)$. Calcule el valor de las constantes a y b para que $f''_{gen}(x) + f(x) = 2\delta(x-\pi) - 3\delta'(x-\pi)$.

Ejercicio 1.7.18. Demuestre la regla del producto para la derivada de orden dos:

$$(gF)'' = g''F + 2g'F' + gF''$$

Note la similitud que tiene con el binomio de Newton para la potencia 2: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^2$. ¿Puede conjeturar una fórmula para la derivada de orden tres de un producto? Exhiba una prueba de su conjetura.

Ejercicio 1.7.19. Calcular la derivada generalizada de la distribución regular $f(x) = \ln|x|$.

Ejercicio 1.7.20. Calcular la primera y la segunda derivada generalizada de $vp(\frac{1}{x})$ (y comparar con la parte finita).

Definición 1.7.21 (Función suave a trozos)**.** Una función se dice **suave a trozos en** $[a, b]$, intervalo cerrado y acotado, si existe un número finito de puntos $\{c_i\}_{i=1}^n$, $a \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_n \leq b$ tales que $f \in \mathcal{C}^\infty(c_i, c_{i+1})$ y existen los límetes laterales $f^{(k)}(c^\pm) := \lim_{x\to c^\pm} f^{(k)}(x)$, para cada $c \in [a, b]$, y $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, salvo para $c = a$ y $c = b$, casos en los que sólo consideramos los límetes por la derecha y por la izquierda respectivamente. Una función es **suave a trozos en** $\mathbb{R}$ si es suave a trozos en cada subintervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Al espacio de las funciones suaves a trozos lo denotaremos por $\mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R})$.

Observación 1.7.22. Note que una función suave a trozos no puede tener asíntotas verticales. Sólo están permitidos picos y saltos en los puntos donde no es suave, pero no cualesquiera (vea los siguientes ejercicios).

Ejercicio 1.7.23. En cada caso diga si la función es suave a trozos o no (justifique su respuesta):

1. $H(x)$
2. $1_{[a,b]}(x)$
3. $f(x) = \tan(x)$
4. $f(x) = \ln|x|$
5. $f(x) = \sin(x)$
6. $f(x) = |\sin(x)|$
7. $f(x) = \sin(1/x)$
8. $f(x) = x\,|\sin(x)|$
9. $f(x) = x^{2/3}1_{[-1,3]}$

10. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (función parte entera)

(AGREGAR MOTIVACIÓN DE LA PROPOSICIÓN SIGUIENTE)

Proposición 1.7.24 (Derivada generalizada de una función suave a trozos)**.**

$$f'_{gen}(x) = f'_{cl}(x) + \sum_{c \in \mathbb{R}} S(f)(c)\delta(x - c)$$

donde $S(f)(c) := f(c^+) - f(c^-)$ *es el salto de* f *en* c*.*

Observación 1.7.25. Note que si f además de ser suave a trozos es continua a trozos, es decir, no tiene saltos, entonces la parte singular de la fórmula para f'_{gen} (las deltas de Dirac) no aparece, esto es, $f'_{gen}(x) = f'_{cl}(x)$. **Al derivar aparecen deltas de Dirac sólo cuando f tiene discontinuidades, es decir, saltos**.

Ejercicio 1.7.26. Calcular $f'_{gen}(x)$ y $f''_{gen}(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = H(x)$

b) $f(x) = 1_{[a,b]}(x)$ y en particular $f(x) = 1_{[-3,2]}(x) - 2 \cdot 1_{[3,4]}(x)$

c) $(\pi - |x|)1_{[-\pi,\pi]})(x)$

d) $(1 - x^2)1_{[-1,1]})(x)$

Ejercicio 1.7.27. Considere $f(x) = \sinh(x)H(x)$. Calcule $f''_{gen}(x) - f(x)$

Ejercicio 1.7.28. Considere $f(x) = \cosh(x)H(x)$. Calcule $f''_{gen}(x) - f(x)$

Ejercicio 1.7.29. Considere $f(x) = \sin(x)H(x)$. Calcule $f''_{gen}(x) + f(x)$

Ejercicio 1.7.30. Considere $f(x) = \cos(x)H(x)$. Calcule $f''_{gen}(x) + f(x)$

1.8. Cálculo Distribucional. Límites

Consideraremos ahora el concepto de convergencia de sucesiones de distribuciones. Luego mostraremos que la distribución δ no es regular, pero sí es el límite (en el sentido distribucional) de distribuciones regulares. La definición de límite en sentido generalizado o distribucional que presentaremos en este curso es como la defición de límite puntual de funciones. A groso modo, una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge a una función f si para cada x la sucesión de números complejos $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$. En estas líneas no hacemos referencia a los dominios de cada f_n y f. Con esta idea en mente procedemos a definir:

Definición 1.8.1 (Límite distribucional)**.** Una sucesión de distribuciones $\{F_n\} \in \mathcal{D}'$ se dice que converge en $\mathcal{D}$ si para cada $\phi\mathcal{D}$ la sucesión de números $\{\langle F_n|\phi\rangle\}$ converge.

Es claro que el funcional F definida por $\langle F|\phi\rangle := \lim_{n\to\infty} \langle F_n|\phi\rangle$ es lineal. Más aún pertenece a $\mathcal{D}'$. Es decir, $\mathcal{D}'$ es cerrado bajo convergencia.

Ejercicio 1.8.2. (NO ES TRIVIAL. Agregar después...) Demuestre que $\mathcal{D}'$ es cerrado bajo convergencia.

Diremos que una sucesión de distribuciones $\{F_n\} \subset \mathcal{D}'$ converge a la distribución $F \in \mathcal{D}'$ si para cada $\phi \in \mathcal{D}$ al sucesión de números complejos $\langle F_n|\phi\rangle$ converge a $\langle F|\phi\rangle$. El subíndice n puede converger de manera continua a infinito o un límite finito y la definición no cambia, salvo que ya no estamos tratando con sucesiones sino con conjuntos dirigidos.

Notación 1.8.3. Si $\{F_n\} \subset \mathcal{D}'$ converge a $F \in \mathcal{D}'$ usaremos la notación (parecida a la estándar) $F_n \xrightarrow{d} F$. Al límite en el sentido distribucional o generalizado también se le llama *límite en el sentido débil*. También usaremos en ocasiones la notación $d - \lim$ para referirnos a este tipo de límite.

Las demostraciones de las siguientes propiedades son directas y sólo hace falta conocer la definición de las operaciones a que hacen referencia, por lo tanto quedarán como ejercicios para la casa.

Tarea 1.8.4. Suponga que $\{F_n\} \subset \mathcal{D}'$ converge a $F \in \mathcal{D}'$. Demuestre que:

a) $F_n' \xrightarrow{d} F'$

b) $F_n(x-a) \xrightarrow{d} F(x-a)$

c) $F_n(ax) \xrightarrow{d} F(ax)$, $a \neq 0$.

d) Si $g \in C^\infty$, $gF_n \xrightarrow{d} gF$.

Ejercicio 1.8.5. Sea $f_n(x) = \frac{n}{2} 1_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)$.

- Haga un bosquejo de la gráfica de f_n para algunos valores de $n \in \mathbb{N}$.
- Calcule $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
- Calcule $d - \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. (Suponga en este ejemplo que es posible intercambiar las operaciones de límite e integración)

En este ejemplo tenemos que en el sentido usual (convergencia puntual de funciones) hay convergencia casi siempre, y por otro lado también se tiene convergencia en $\mathcal{D}'$, pero los l ímites no definen la misma distribución.

Ejercicio 1.8.6. Sea $f_n(x) = n^2 1_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)$.

- Haga un bosquejo de la gráfica de f_n para algunos valores de $n \in \mathbb{N}$.
- Calcule $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
- Calcule $d - \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

En este ejemplo tenemos convergencia puntual casi siempre, pero no hay convergencia en $\mathcal{D}'$

Estos dos ejemplos muestran que la convergencia puntual y la convergencia en $\mathcal{D}'$ no son fáciles de relacionar. Podemos tener una sin que la otra exista, e incluso si ambas existes puede que los límites no se correspondan.

Hay integrales impropias que en el sentido usual divergen, sin embargo es posible aún dar un sentido a estas integrales a través de la teoría de distribuciones. Por ejemplo,

Ejercicio 1.8.7. Sea $I_r(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^r \cos(\omega x)\, d\omega = \dfrac{\sin(rx)}{\pi x}$. Para todo x esta integral diverge cuando $r \longrightarrow \infty$. Sin embargo, $d - \lim\limits_{r\to\infty} I_r(x) = \delta(x)$. (Este último límite será probado con detalle más adelante a través de la teoría de la transformada de Fourier)

Ejercicio 1.8.8. El Dipolo: sea $F_\epsilon(x) = \frac{Q}{2\epsilon}\delta(x+\epsilon) - \frac{Q}{2\epsilon}\delta(x+\epsilon)$, donde $\epsilon > 0$. Calcule $d - \lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(x)$.

Ejercicio 1.8.9. El Dipolo II: sea $f_n(x) = n^2 1_{[-\frac{1}{n},0]}(x) - n^2 1_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$.

- Haga un bosquejo de la gráfica de f_n para algunos valores de $n \in \mathbb{N}$.
- Calcule $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
- Calcule $d - \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. (Suponga en este ejemplo que es posible intercambiar las operaciones de límite e integración)

Ejercicio 1.8.10. Sea $F \in \mathcal{D}'$. Calcule $d - \lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{F(x+\epsilon) - F(x)}{\epsilon}$.

En algunos ejemplos sobre límites generalizados es necesario saber cómo se comportan las operaciones de límite (en el sentido usual) e integración. Resulta que, en general, estas operaciones no conmutan, es decir, no podemos intercambiar límites con integrales (la integral del límite no es el límite de las integrales). Por ejemplo, si estamos calculando el límite de una integral, digamos $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$, no podemos en general decir que esto es igual a $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$. El siguiente ejemplo ilustra lo que quiero decir.

Ejercicio 1.8.11. Sabemos que $\int_0^\infty \sin(x)\,dx$ no existe. Pero $\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^\infty e^{-\epsilon x}\sin(x)\,dx$ sí (calcúlelo).

En los siguientes ejercicios verifique si es posible o no intercambiar los símbolos "lím" y "$\int$"

Ejercicio 1.8.12. Considere $f_n(x) = \begin{cases} n\sin(nx), & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{n} \\ 0, & x \ge \dfrac{\pi}{n} \end{cases}$, definidas en el intervalo $[0,1]$. Entonces $f_n(x)$ converge a 0, para cada $x \in [0,1]$.

Ejercicio 1.8.13. Sea $f_n(x) = \begin{cases} n^2\sin(n^2x), & 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 0, & x \ge \dfrac{1}{n} \end{cases}$, definidas en el intervalo $[0,1]$. Entonces $f_n(x)$ converge a 0, para cada $x \in [0,1]$.

Ejercicio 1.8.14. Ahora consideremos $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$ (suave a trozos, y por tanto define una distribución regular en $\mathcal{D}'$) y la sucesión $f_n(x) := nf(nx)$ (el dominio es todo $\mathbb{R}$).

a) Haga un bosquejo de la gráfica de f_n para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

b) Verifique que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

c) Verifique que en efecto no es cierto que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$.

¿Cuándo conmutan las operaciones de límite e integración? Presentamos un hermoso teorema en el que se exponen condiciones bajo las cuales este intercambio de operaciones puede hacerse:

Teorema 1.8.15 (Teorema de Convergencia Dominada)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que convergen puntualmente a f sobre un subconjunto $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Supongamos que existe una función $g \in L^1(a,b)$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo n. Entonces:*

- $f \in L^1(a,b)$,
- $\lim\limits_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$

El ejercicio anterior es un caso particular del siguiente resultado:

Teorema 1.8.16 (Límites a δ)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x) = 1$, y sean $f_n(x) = nf(nx)$. Entonces $d - \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \delta(x)$.*

Ejercicio 1.8.17. Pulsos rectangulares, $e^{-|x|}$, e^{-x^2}, $1/(1+x^2)$. Con estas funciones construir sucesiones que converjan a delta, 2 delta, delta primo, y 3 delta primo.

Es claro que una vez establecida la definición de límite de distribuciones, entonces es posible hablar de series de distribuciones. Presentamos un par de ejemplos a continuación

Ejercicio 1.8.18. (El Tren de Impulsos) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \delta(x-n)$ converge en $\mathcal{D}'$.

Ejercicio 1.8.19. (El Peine) La serie $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$ converge en $\mathcal{D}'$.

Ejercicio 1.8.20. Muestre que una serie trigonométrica $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, donde $|c_n| < M|n|^k$ para $n \neq 0$, M y k constantes reales, converge en $\mathcal{D}'$. Su suma es igual a $c_0 + g^{(p)}(x)$, donde p es una entero no negativo no menor que $k+2$, y $g(x)$ es la función continua periódica dada por la serie trigonométrica

$$g(x) \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_n}{(in)^p} e^{inx}$$

Use el ejercicio anterior para resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio 1.8.21. (El Peine II) Determine qué distribución representa la serie $f(x) \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}$.

El siguiente ejercicio muestra otra ventaja importante de la teoría de distribuciones

Ejercicio 1.8.22. Demuestre que una serie de distribuciones convergente se puede derivar término a término y la serie resultante también es convergente.

Ejercicio 1.8.23. (AGREGAR Zemanian)

1.8.1. Convergencia dominada

(AGREGAR)

1.9. Primitivas de distribuciones en $\mathcal{D}'$

1.10. Continuidad y diferenciabilidad con respecto a un parámetro del que dependen las funciones de prueba

1.11. Distribuciones que dependen de un parámetro e integración con respecto a ese parámetro

1.12. Extensión del espacio de prueba

Hasta ahora es espacio de prueba que hemos considerado es $\mathcal{D}$, las funciones suaves y con soporte compacto. Hay distribuciones que se pueden extender a espacios de prueba más amplios, como el espacio de las funciones suaves suaves y de rápido decrecimiento, o el espacio de las funciones suaves. Vamos a considerar en esta sección estas dos extensiones en particular. Las distribuciones definidas sobre C^∞ reciben el nombre de *distribuciones con soporte compacto*, y las definidas sobre $\mathcal{S}$ serán llamadas *distribuciones moderadas o atemperadas.*

1.12.1. Distribuciones con soporte compacto

Consideremos $F \in \mathcal{D}'$ con soporte compacto. Entonces es posible extender el espacio de las funciones de prueba $\mathcal{D}$ al espacio C^∞, y el funcional F es continuo en C^∞. Es decir, $F \in (C^\infty)'$. Al espacio $(C^\infty)'$ se le llama espacio de las *distribuciones con soporte compacto*...

Ejercicio 1.12.1. (DAR EJEMPLOS)

1.12.2. Distribuciones atemperadas

Si consideramos como espacio de prueba al espacio S (funciones suaves y de rápido decrecimiento), y denotamos, como es usual, por S' al espacio de los funcionales lineales y continuos en S, decimos que $F \in S'$ es una *distribución moderada o atemperada.*

Ejercicio 1.12.2. Toda distribución con soporte compacto es moderada, es decir, $(C^\infty)' \subset S'$

Es importante notar que no toda distribución en $\mathcal{D}'$ es moderada, en particular, no toda función $f \in L^1_{loc}$ define una distribución regular moderada. Por ejemplo, $f(x) = \cosh(x)$ es de L^1_{loc} y define una distribución regular en $\mathcal{D}'$, pero no define una distribución moderada. A groso modo, se puede probar que si f tiene un comportamiento en infinito como el un polinomio o menor, esto es, existe n tal que $\lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{f(x)}{x^n}\right| = 0$, entonces f define una distribución regular en S'. En este caso decimos que f tiene un comportamiento moderado en $\pm\infty$.

Ejercicio 1.12.3. (DAR EJEMPLOS)

1.13. Aplicaciones al cálculo de integrales definidas

En esta sección usaremos la teoría de distribuciones para calcular ciertas integrales definidas. La idea general es convertir la integral en una integral impropia sobre todo $\mathbb{R}$ y pensar que es la acción de una distribución regular sobre una función de prueba en particular.

Ejercicio 1.13.1. Calcular $I_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos(nx)\,dx$, para cada $n \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 1.13.2. Calcular $(x^n H(x))^{(n)}_{gen}$

Ejercicio 1.13.3. Calcular $I = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$

Ejercicio 1.13.4. Sean $f(x) = e^{-|x|}$, y $\phi(x) = e^{-x^2/2}$:

a) Calcular $f''_{gen}(x) - f(x)$,

b) calcule $\phi''(x)$ y expréselo en términos de $\phi(x)$,

c) calcule la integral $I = \int_0^\infty (1 - x^2) e^{-x^2/2-x}$.

Ejercicio 1.13.5. Calcular $I_n = \int_{-1}^1 f(x) e^{-nx}\, dx$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde

$$\begin{cases} \cos(\pi x/2), & \text{si } |x| > 1/2; \\ \sqrt{2}/2, & \text{si } |x| \leq 1/2. \end{cases}$$

1.14. Funciones de prueba y distribuciones de varias variables

1.14.1. Derivada en varias variables

(AGREGAR)

Capítulo 2

Convolución

2.1. Convolución de funciones

Definición 2.1.1 (Función Causal)**.** Una función f suave a trozos se dice causal si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ en $(-\infty, a)$.

Ejercicio 2.1.2. $H(x-a)$ es causal, pero $H(a-x)$ no lo es.

Definición 2.1.3. Una función $f(x)$ se dice anticausal si $f(-x)$ es causal.

Definición 2.1.4 (Distribución causal)**.** Una distrbución $F \in \mathcal{D}'$ se dice causal si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ en $(-\infty, a)$.

Igual que antes podemos definir distribución anticausal.

Ejercicio 2.1.5. Regulares causales, de soporte compacto (acotado), la delta son distribuciones causales.

Definición 2.1.6 (Convolución)**.** Definimos la convolución (o el producto de convolución) de dos funciones f y g por

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dy$$

si la integral existe.

¿Cuándo existe la convolución?. Algunos contextos en los que existe tal integral son los siguientes:

1. Si $f, g \in L^1$, existe $f(x) * g(x)$ y también pertenece a L^1.

2. Si f es acotada y $g \in L^1$, existe $f(x) * g(x)$.

3. Si $f, g \in L^2$, existe $f(x) * g(x)$.

4. Si f tiene soporte compacto y $g \in L^1_{loc}$, existe $f(x) * g(x)$

5. Si f y g son causales, existe $f(x) * g(x)$ y es causal.

6. Si f y g son anticausales, existe $f(x) * g(x)$ y es anticausal.

Ejercicio 2.1.7. Funciones Causales: sean $f(x) = u(x)H(x-a)$ y $g(x) = v(x)H(x-b)$, donde $u, v \in C^\infty_p$, dos funciones causales. Entonces

$$f(x)*g(x) = (u(x)H(x-a))*(v(x)H(x-b)) = \int_b^{x-a} u(x-y)v(y)\, dy H(x-(a+b))$$

Ejercicio 2.1.8. Calcular la convolución de Heaviside con Heaviside.

Ejercicio 2.1.9. Calcular la convolución de $x^4H(x-2)$ con $xH(x)$.

Teorema 2.1.10 (Propiedades de la convolución)**.** *1. Conmutativa*

2. Asociativa

3. Distributiva

4. Si $c \in \mathbb{C}$, $(cf(x)) * g(x) = f(x) * (cg(x) = c(f(x) * g(x))$.

5. Traslación de una convolución:

6. Derivada de una convolución:

Observación 2.1.11. Falta un elemento neutro.

Ejercicio 2.1.12. Calcular la convolución de dos pulsos rectangulares.

2.2. Convolución en el sentido distribucional

(PRODUCTO DIRECTO DE DOS DISTRIBUCIONES (no para matemáticas VII))

Sean $f, g \in \mathcal{D}'$ regulares y consideremos de manera informal la convolución $f * g$ como una distribución regular también. Entonces

$$
\begin{aligned}
\langle f * g|\phi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) * g(x)\phi(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\phi(x)\, dy\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\phi(x)\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(y)\phi(y+z)\, dz\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(y)\phi(y+z)\, dy\, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\langle g(y)|\phi(y+z)\rangle\, dy \\
&= \langle f(z)|\langle g(y)|\phi(y+z)\rangle\rangle
\end{aligned}
$$

Entonces, tiene sentido definir la convolución de dos distribuciones $F, G \in \mathcal{D}'$ por la fórmula

$$\langle F * G|\phi\rangle = \langle F(x)|\langle G(z)|\phi(x+z)\rangle\rangle$$

Sin embargo, no para toda F y G esto está bien definido pues en general $\langle G(z)|\phi(x+z)\rangle$ no es una función de prueba, no porque no sea suave, sino porque no necesariamente tiene soporte compacto.

Teorema 2.2.1. *La convolución de dos distribuciones $F, G \in \mathcal{D}'$ está bien definida por la fórmula anterior en las siguientes situaciones:*

1. *F o G tiene soporte compacto.*
2. *F y G son causales.*
3. *F y G son anticausales.*

Ejercicio 2.2.2. Demuestre que para toda $F \in \mathcal{D}'$, $F(x) * \delta(x) = F(x)$

Teorema 2.2.3 (Propiedades de la Convolución de Distribuciones)**.** *Todas las anteriores, más la existencia de un elemento neutro.*

Ejercicio 2.2.4. Demuestre que para toda $F \in \mathcal{D}'$, $F(x) * \delta(x-a) = F(x-a)$

Ejercicio 2.2.5. Sean $F, G \in \mathcal{D}'$ tales que existe $F * G$. Demuestre que

1. $(F * G)^{(n)}) = F^{(n)} * G = F * G^{(n)}$
2. $(F * G)^{(n+k)}) = F^{(n)} * G^{(k)}$
3. Si L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes, entonces $L(F * G) = (LF) * G = F * (LG)$

2.3. Solución fundamental

Definición 2.3.1. Dado un operador diferencial lineal L, decimos que una distribución $G(x) \in \mathcal{D}'$ es una *solución fundamental* de L sii $L_{gen}G(x) = \delta(x)$. Si G_h es la soluición general de la ecuación homogénea $L_{gen}G = 0$, y G_p es una solución fundamental particular de L, definimos la *solución fundamental general* de L por $G_g = G_h + G_p$.

Observación 2.3.2. Si el operador L tiene coeficientes constantes, entonces la solución general de la ecuación homogénea $L_{gen}G(x) = 0$ es una función clásica, es decir, que pertenece a C^∞. Pero si L tiene coeficientes no constantes, entonces es posible que haya soluciones distribucionales no clásicas. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejercicio 2.3.3. Sea $L = xD'' + (x+3)D + Id$. Verifique que la distribución $\delta(x) + \delta'(x)$ es solución de la eciación homogénea $Lu(x) = 0$. (En este ejercicio será útil el siguiente ejercicio: Demuestre que $x\delta^{(n)}(x) = -n\delta^{(n-1)}(x)$, para $n \in \mathbb{N}$.)

Ejercicio 2.3.4. Sea $L = x^3D + 2Id$. Verifique que $\frac{1}{2}\delta(x)$ es solución fundamental de L.

Ejercicio 2.3.5. Sea $g(x) = e^{-|x|}$ y sea $L = D^2 - Id$

1. Calcule $L_{gen}g(x)$.
2. Calcule una solcuión fundamental de L.
3. Calcule la solcución fundamental general de L,

Ejercicio 2.3.6. Sea $L = x^2D^2 - 3xD - Id$

1. Calcule $L_{gen}\delta(x)$.
2. Calcule una solcuión fundamental de L.
3. Calcule la solcución fundamental general de L,

Teorema 2.3.7. *Sea L un operador diferencial lineal con coeficientes constantes, y sea G y solución fundamental particular de L tal que está bien definida la convolución $G * F$. Entonces $u(x) = G(x) * F(x)$ es una solución particular de la ecuacíon $Lu(x) = F(x)$.*

Si L tiene coeficientes constantes entonces es posible construir una solución fundamental particular de la siguiente forma: $G(x) = g(x)H(x)$, donde g es una función suave. A esta solución fundamental en particular se le llama *propagador causal.*

Ejercicio 2.3.8. Sea $L = 4D^2 - Id$.

1. Halle el propagador causal de L.
2. Use la parte anterior para hallar una solución particular de la ecuación $Lu(x) = \delta(x-1) - \delta'(x+1)$

Ejercicio 2.3.9. Sea $L = 2D^2 - 5D + 2Id$.

1. Halle el propagador causal de L.
2. Use la parte anterior para hallar una solución particular de la ecuación $Lu(x) = \delta(x-1) - \delta'(x+1)$

En general,

Teorema 2.3.10. *Si $L = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k$ tiene coeficientes constantes y es de orden n, es decir, $a_n \neq 0$, entonces el propagador causal asociado a L es $G(x) = g(x)H(x)$, donde $g(x)$ satisface el siguiente problemas de valores iniciales:*

$$\begin{aligned}
&Lg(x) = 0, \\
&g^{(n-1)}(0) = 1/a_n, \\
&g^{(k)}(0) = 0, \qquad \textit{para } 0 \leq k < n-1.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.11. Halle la solución general de la ecuación diferencial $Lu(x) = H(x-1)e^{x+1}$, donde $L = D^2 - Id$

2.4. Ecuaciones de Convolición

En esta sección consideramos operadores integrales definidos a través del producto de convolución de la siguiente manera

Definición 2.4.1. Dada g definimos el operador de convolución $g*$ por $g*u$, para cada u tal que la convolución existe.

Este operador es claramente lineal.

Dada f deseamos resolver la ecuación de convolución $g*u=f$, donde u es la función incógnita.

Definición 2.4.2. $G \in D'$ es una solounción fundamenta del operador de convolución $g*$ si $(g*G)(x)=\delta(x)$.

Teorema 2.4.3. *Si G es una solución fundamental de $g*$, entonces $u(x) = (G*f)(x)$ es una solución particular de la ecuación de convolución $g*u=f$*

2.5. Problemas de valores iniciales (PVI)

Dado L un operador diferencial de coeficientes constantes y de orden n, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Ly(x) = f(x) \\ y(a) = y_0 \\ y'(a) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) = y_{n-1} \end{cases}$$

puede ser resuelto si conocemos una solución fundamental asociada a L. El procedimiento general consiste en hallar una ecuación diferencial generalizada causal (las distribuciones son causales) y resolver esa ecuación usando el propagador causal y el producto de convolución, como en la sección anterior

Método de Funciones Causales Para la Resolver PVI:

1. Consideramos la función causal $u(x) = y(x)H(x-a)$,

2. Hallamos la ecuación causal $L_{gen}u(x) = F(x)$, donde $F(x)$ es una distribución causal,

3. Resolvemos la ecuación anterior. Por ejemplo, consideramos $u(x) = G(x)*F(x)$, donde G es el propagador causal. Como F y G son causales entonces está garantizada la existencia de la convolución.

4. Finalmente, una vez conseguida $u(x) = y(x)H(x-a)$, extraemos de allí la solución $y(x)$ del PVI original.

Ejercicio 2.5.1. Resuelva los siguientes PVI

$$\begin{cases} y''(x) - y(x) = \cos(x) \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = -1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) = y_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \\ y(-1) = 2 \\ y'(-1) = 1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) = y_{n-1} \end{cases}$$

2.6. Transformada de Laplace

En esta sección vamos a definir la transformada de Laplace, una herramienta que puede ser de gran ayuda para calcular algunos de los objetos estudiados en la sección anterior.

Definición 2.6.1. Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definimos la transformada de Laplace de f por

$$\mathcal{L}\left(f(x)\right)(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-zx}\, dx, \quad z \in \mathbb{C}$$

si la integral existe.

La pregunta natural es: ¿cuándo existe la integral?. El siguiente teorema da condiciones suficientes para garantizar la existencia de la transformada de Laplace:

Teorema 2.6.2. *Si f es una función causal y de crecimiento exponencial, es decir, existen constantes $M > 0$ y $\alpha_0 \geq 0$ tales que $|f(x)| \leq Me^{\alpha_0 x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces existe $\mathcal{L}\left(f\right)(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(z) > \alpha_0$.*

Demostración. (AGREGAR) □

Ejercicio 2.6.3. La función de Heaviside es causal y de crecimiento exponencial. En este ejemplo $M = 1$ y $\alpha_0 = 0$. Más aún, su transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}\left(H(x)\right)(z) = \frac{1}{z}, \qquad z : \Re(z) > 0$$

Definir la transformada de Laplace como una integral impropia sobre todo $\mathbb{R}$ permite extender la definición al contexto de las distribuciones de la siguiente manera:

Definición 2.6.4. Dada $F \in \mathcal{D}'$, definimos la transformada de Laplace de F por

$$\mathcal{L}\left(F(x)\right)(z) := \langle F(x) | e^{-zx} \rangle$$

si el corchete existe.

Del teorema anterior, si F es regular y $F(x)$ es causal y de crecimiento exponencial entonces podemos garantizar que este corchete está bien definido, es decir, existe. Por otro lado, puesto que la función de prueba que aparece en la definición, esto es e^{-zx}, es una función suave, entonces la transformada de Laplace también existe si la distribución F es de soporte compacto. Por ejemplo

Ejercicio 2.6.5. $\mathcal{L}\left(\delta(x)\right)(z) = 1$.

En el curso de matemáticas VII sólo son estudiados estos dos ejemplos que hemos dado de transformadas de Laplace. El resto de los ejemplos que serán calculados se deducen de estos dos y la aplicación de las siguientes propiedades:

Teorema 2.6.6. *Propiedades de la Transformada de Laplace*

1. *Linealidad:*
   - $\mathcal{L}\left(f(x) + g(x)\right)(z) = \mathcal{L}\left(f(x)\right)(z) + \mathcal{L}\left(g(x)\right)(z)$.
   - $\mathcal{L}\left(\alpha f(x)\right)(z) = \alpha \mathcal{L}\left(f(x)\right)(z)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
2. *Traslaciones*
   - $\mathcal{L}\left(f(x-a)\right) = e^{-az} \mathcal{L}\left(f(x)\right)(z)$
   - $\mathcal{L}\left(e^{z_0 x} f(x)\right)(z) = \mathcal{L}\left(f(x)\right)(z - z_0)$

3. *Derivadas*
   - $\mathcal{L}\left(f'_{gen}(x)\right)(z) = z\mathcal{L}\left(f(x)\right)(z)$
   - $\mathcal{L}\left(xf(x)\right)(z) = -\dfrac{d}{dz}\mathcal{L}\left(f(x)\right)(z)$
4. *Convolución*
   - $\mathcal{L}\left(f(x) * g(x)\right)(z) = \mathcal{L}\left(f(x)\right)(z)\mathcal{L}\left(g(x)\right)(z)$

Notación 2.6.7. Es usual que si usamos letras minúsculas para denotar a las funciones de variable real, por ejemplo $u(x)$, entonces se usa la misma letra pero en mayúscula para denotar la transformada de Laplace, $U(z)$.

Ejercicio 2.6.8. En cada caso calcular la transformada de Laplace

1. $H(x)$
2. $xH(x)$
3. $x^2H(x)$
4. $x^nH(x)$
5. $\frac{e^{z_0x}x^{k-1}}{(k-1)!}H(x)$
6. $\sin(x)H(x)$
7. $\cos(x)H(x)$
8. $\sinh(x)H(x)$
9. $\cosh(x)H(x)$

Definición 2.6.9. Dada $U(z)$, $z \in \mathbb{C}$, la transformada de Laplace inversa de $U(z)$ es una función $u(x)$ tal que $\mathcal{L}\left(u(x)\right)(z) = U(z)$. Denotaremos, como es usual, a la transformada de Laplace inversa por $u(x) = \mathcal{L}^{-\infty}\left(U(z)\right)(x)$

Ejercicio 2.6.10. (TODOS LOS ANTERIORES)

Ejercicio 2.6.11. Calcular la transformada de Laplace inversa en cada caso

1. $U(z) = \frac{\omega}{z^2-\omega^2}$
2. $U(z) = \frac{z}{z^2+\omega^2}$

3. $U(z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}$
4. $U(z) = \frac{z}{z^2+\omega^2}$

Si la función $U(z)$ es un cociente de polinomios podemos conseguir una fórmula para calcular $u(x) = \mathcal{L}^{-\infty}(U(z))(x)$ en términos de los residuos de $U(z)e^{zx}$:

Teorema 2.6.12. *Sea $U(z) = P(z)/Q(z)$, donde P y Q son polinomios tales que grad$(P) <$ grad(Q). Entonces*

$$\mathcal{L}^{-\infty}(U(z))(x) = \sum_{z_0} Res(U(z)e^{zx}; z_0)H(x)$$

Ejercicio 2.6.13. (AGREGAR)

2.6.1. Algunas aplicaciones de la transformada de Laplace

Ejercicio 2.6.14. **Calcular propagador causal**

Ejercicio 2.6.15. **Calcular convolución**

Ejercicio 2.6.16. **Calcular solución fundamental de un operador de convolución**

Ejercicio 2.6.17. **Resolver PVI**

Ejercicio 2.6.18. **Resolver PVI con coeficientes variables**